
APPROKSIMASI SOLUSI MENGGUNAKAN METODE STEHFEST SEBAGAI INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

Millatuz Zahroh

Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Jember
Jalan Kalimantan Tegalboto No. 37, Jember, Jawa Timur
Alamat e-mail halimahmutiara7@gmail.com

Abstrak

Transformasi Laplace merupakan transformasi integral yang sering dimanfaatkan untuk mengeliminasi persamaan diferensial parsial pada dimensi waktu, sehingga dapat diselesaikan dengan metode yang lain. Akan tetapi, solusi akhir jika solusi yang dibutuhkan dalam bentuk dimensi waktu, maka perlu diinverskan yaitu menggunakan invers transformasi Laplace. Metode Stehfest merupakan salah satu teknik inversi transformasi Laplace yang sering digunakan dalam penyelesaian persamaan aliran bawah tanah dan industri teknik pertambangan minyak. Dalam penelitian ini akan dikaji lebih jauh mengenai akurasi metode Stehfest dengan $p=6$ dan $P=3$ melalui aproksimasi dari berbagai solusi hasil transformasi Laplace. Hasil akhir menunjukkan dari berbagai semakin besar nilai waktu (t), maka semakin besar nilai error yang diperoleh.

Kata Kunci: transformasi Laplace, dimensi waktu, metode Stehfest.

Abstract

The Laplace transformation is an integral transformation that is often used to eliminate partial differential equations in the time dimension, so that they can be solved using other methods. However, if the final solution is needed in the form of a time dimension, it needs to be inverted, namely using the inverse Laplace transformation. The Stehfest method is a Laplace transform inversion technique that is often used in solving underground flow equations and in the oil mining engineering industry. In this research, the accuracy of the Stehfest method with $p=6$ and $P=3$ will be studied further through approximation of various solutions resulting from the Laplace transformation. The final results show that the greater the time value (t), the greater the error value obtained

Keywords: Laplace transformation, time dimension, Stehfest method.

PENDAHULUAN

Transformasi Laplace merupakan transformasi integral yang dimanfaatkan untuk merubah bentuk persamaan diferensial biasa menjadi bentuk persamaan linear ataupun merubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial yang tidak bergantung waktu. Berikut diberikan definisi dari Transformasi Laplace.

Definisi 1. Diberikan fungsi $F(t)$ dengan $t \geq 0$. Transformasi Laplace dari fungsi $F(t)$ ditulis $\mathcal{L}(F(t))$ didefinisikan

$$\mathcal{L}(F(t)) = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1)$$

dengan s parameter bernilai real sehingga integralnya ada.

Transformasi Laplace mengeliminasi dimensi waktu dari suatu persamaan diferensial agar lebih mudah dicari solusi analitiknya atau dapat diselesaikan menggunakan metode numerik seperti

metode elemen hingga atau elemen batas pada Zahroh dan Sholekhuddin (2022). Selanjutnya, jika diinginkan solusi akhir berdimensi waktu, maka hasil dari perhitungan perlu diinverskan.

Diasumsikan invers transformasi Laplace untuk suatu fungsi kontinu $f(s)$ ada, maka dalam menentukan invers transformasi Laplace dari fungsi yang sederhana dapat ditentukan dengan menggunakan tabel invers transformasi Laplace. Namun, untuk persamaan yang kompleks, menurut Cheng (1994) invers transformasi Laplace secara eksak sulit ditentukan nilainya. Dengan demikian, digunakan teknik pendekatan inversi numerik Transformasi Laplace untuk mendapatkan solusi persamaan dalam dimensi yang bergantung waktu. Terdapat beberapa pendekatan inversi numerik Transformasi Laplace, salah satu metode yang memiliki keakurasian yang baik adalah metode Stehfest.

Metode Stehfest (1970) adalah salah satu teknik inversi numerik transformasi Laplace yang cukup populer digunakan untuk menyelesaikan persamaan aliran air dalam tanah dan industri perminyakan.

Definisi 2. Jika transformasi Laplace suatu fungsi $F(t)$ adalah $f(s)$, invers transformasi Laplace metode Stehfest didefinisikan sebagai berikut

$$F(t) \cong \frac{\ln(2)}{t} \sum_{p=1}^{2P} K_p f(s_p) \quad (2)$$

dengan

$$s_p = p \frac{\ln(2)}{t},$$

dan

$$K_p = (-1)^{(p+P)} \sum_{m=(p+1)/2}^{\min(p,P)} \frac{m^P (2m)!}{(P-m)! m! (m-1)! (p-m)! (2m-p)!}$$

p, P adalah bilangan bulat positif, $6 \leq p \leq 20$ bernilai genap dan $P = \frac{1}{2}p$ [Cheng, 1994]

Berdasarkan uraian sebelumnya, penelitian ini akan membahas mengenai aproksimasi solusi dari beberapa persamaan sederhana menggunakan metode Stehfest sebagai inversi numerik transformasi Laplace. Evaluasi dilakukan pada beberapa persamaan yang telah disederhanakan dengan teknik transformasi Laplace. Selanjutnya, hasil yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi eksaknya. Dengan demikian keakurasian dari metode Stehfest dapat dikaji lebih jauh dengan $p=6$ dan $P=3$ melalui aproksimasi dari berbagai solusi hasil transformasi Laplace.

METODE

Penelitian ini diaplikasikan pada beberapa fungsi sederhana yang akan dievaluasi menggunakan transformasi Laplace Persamaan (1). Adapun syarat agar suatu fungsi dapat ditransformasikan menggunakan transformasi Laplace adalah

Teorema 1. Diberikan fungsi real $F(t)$ untuk $t > 0$ yang memiliki sifat sebagai berikut:

1. Fungsi F merupakan fungsi yang kontinu sepotong-sepotong pada interval tertutup terbatas $0 \leq t \leq b$ ($b > 0$)
2. Fungsi F merupakan fungsi eksponensial berorder, yaitu apabila terdapat $\alpha, M > 0$ dan $t_0 > 0$ sedemikian sehingga berlaku $e^{\alpha t} |F(t)| < M$ untuk $t_0 > 0$.

Transformasi Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

atas F ada untuk $s > \alpha$

Tahap berikutnya, fungsi hasil transformasi Laplace diselesaikan menggunakan metode Stehfest persamaan (2). Jika transformasi Laplace suatu fungsi $F(t)$ adalah $f(s)$, yaitu $\mathcal{L}(F(t)) = f(s)$ maka $F(t)$ disebut kebalikan transformasi Laplace (Invers transformasi Laplace) dari $f(s)$ dan dituliskan dengan $F(t) = \mathcal{L}^{-1}(f(s))$ merupakan invers transformasi Laplace atas F .

Fungsi F sebagai invers transformasi Laplace belum tentu ada untuk suatu fungsi $f(s)$. Jika f merupakan suatu transformasi maka fungsi tersebut harus memiliki sifat kontinu dan konvergen untuk nilai $s \rightarrow \infty$. Diasumsikan invers transformasi Laplace fungsi $f(s)$ ada, maka untuk menjamin ketunggalan fungsi tersebut digunakan teorema berikut

Teorema 2. Diberikan fungsi f dan g yang merupakan fungsi kontinu sepotong - sepotong untuk $t > 0$. Jika fungsi f dan g memiliki transformasi Laplace, untuk fungsi F yang sama, maka $f(t) = g(t)$ untuk setiap $t \geq 0$

Langkah terakhir yaitu membandingkan solusi eksak dengan solusi numerik metode Stehfest. Perbandingan antara solusi eksak dengan solusi numerik disertai dengan nilai errornya akan disajikan dalam bentuk grafik dan tabel. Dengan demikian dapat diperoleh hasil dan kesimpulan berupa keakurasian metode Stehfest sebagai invers numerik transformasi Laplace dari beberapa fungsi yang telah ditentukan sebelumnya. Adapun skema penelitian ditunjukkan pada Gambar 1.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini akan membahas evaluasi permasalahan beberapa fungsi yang dapat ditransformasikan menggunakan transformasi Laplace sesuai **Teorema 1**.

Diberikan fungsi $F_1(t) = e^{-t/2}$, $F_2(t) = \sin \frac{1}{4}t$, $F_3(t) = \cos \frac{1}{4}t$. Dengan memanfaatkan Persamaan (1), maka untuk memperoleh hasil transformasi Laplace dari fungsi bergantung waktu tersebut dibutuhkan solusi integral taktentu sebagai berikut

$$\int e^{-st} F_1(t) dt = \int e^{-st} e^{-\frac{t}{2}} dt = \int e^{-(s+\frac{1}{2})t} dt = -(s + \frac{1}{2})e^{-(s+\frac{1}{2})t}$$

selanjutnya

$$\int e^{-st} F_2(t) dt = \int e^{-st} \sin \frac{1}{4}t dt = -4e^{-st} \cos \frac{1}{4}t - 16se^{-st} \sin \frac{1}{4}t + 16s^2 \int e^{-st} \sin \frac{1}{4}t dt$$

maka

$$\int e^{-st} \sin \frac{1}{4}t dt = \frac{-\left(4e^{-st} \cos \frac{1}{4}t + 16se^{-st} \sin \frac{1}{4}t\right)}{1 - 16s^2}$$

berikutnya

$$\int e^{-st} F_3(t) dt = \int e^{-st} \cos \frac{1}{4}t dt = 4e^{-st} \sin \frac{1}{4}t + 16se^{-st} \cos \frac{1}{4}t - 16s^2 \int e^{-st} \cos \frac{1}{4}t dt$$

maka

$$\int e^{-st} \cos \frac{1}{4}t dt = \frac{4e^{-st} \sin \frac{1}{4}t + 16se^{-st} \cos \frac{1}{4}t}{1 + 16s^2}$$

diperoleh

$$\mathcal{L}(F_1(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} F_1(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-(s + \frac{1}{2})e^{-(s+\frac{1}{2})t} \right]_0^b = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{L}(F_2(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} F_2(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-\left(4e^{-st} \cos \frac{1}{4}t + 16se^{-st} \sin \frac{1}{4}t\right)}{1 - 16s^2} \right]_0^b = \frac{1}{4\left(s^2 + \frac{1}{16}\right)}$$

$$\mathcal{L}(F_3(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} F_3(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{4e^{-st} \sin \frac{1}{4}t + 16se^{-st} \cos \frac{1}{4}t}{1 + 16s^2} \right]_0^b = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{16}}$$

Dengan demikian diketahui bahwa invers transformasi Laplace $\mathcal{L}^{-1}(f(s))$ dari $f_1(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$

adalah $F_1(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, berikutnya $f_2(s) = \frac{1}{4(s^2+\frac{1}{16})}$ adalah $F_2(t) = \sin\frac{1}{4}t$, dan $f_3(s) = \frac{s}{s^2+\frac{1}{16}}$ adalah

$$F_3(t) = \cos\frac{1}{4}t.$$

Selanjutnya dibandingkan solusi eksak dengan solusi metode Stehfest Persamaan (2) dengan nilai $p = 6$ dan $P = 3$, diperoleh:

Untuk $p = 1$

$$K_p = (-1)^{(1+3)} \sum_{m=1}^1 \frac{m^3(2m)!}{(3-m)! m! (m-1)! (1-m)! (2m-1)!} = 1$$

Untuk $p = 2$

$$K_p = (-1)^{(2+3)} \sum_{m=1}^2 \frac{m^3(2m)!}{(3-m)! m! (m-1)! (2-m)! (2m-2)!} = -49$$

Untuk $p = 3$

$$K_p = (-1)^{(3+3)} \sum_{m=1}^3 \frac{m^3(2m)!}{(3-m)! m! (m-1)! (3-m)! (2m-3)!} = 366$$

Untuk $p = 4$

$$K_p = (-1)^{(4+3)} \sum_{m=1}^4 \frac{m^3(2m)!}{(3-m)! m! (m-1)! (4-m)! (2m-4)!} = -858$$

Untuk $p = 5$

$$K_p = (-1)^{(5+3)} \sum_{m=1}^5 \frac{m^3(2m)!}{(3-m)! m! (m-1)! (5-m)! (2m-5)!} = 810$$

Untuk $p = 6$

$$K_p = (-1)^{(6+3)} \sum_{m=1}^6 \frac{m^3(2m)!}{(3-m)! m! (m-1)! (6-m)! (2m-6)!} = -270$$

Selanjutnya diselesaikan menggunakan program MATLAB dan diperoleh perbandingan solusinya sebagai berikut

Tabel 1. Tabel solusi numerik Metode Stehfest dan solusi eksak Fungsi $\mathfrak{g}^{-1}(f_1(s))$

| t | Stehfest | Eksak | Error |
|------|----------|----------|----------|
| 0.10 | 0.951367 | 0.951229 | 0.000137 |
| 0.20 | 0.905056 | 0.904837 | 0.000219 |
| 0.30 | 0.860864 | 0.860708 | 0.000156 |
| ... | ... | ... | ... |
| 2.00 | 0.362888 | 0.367879 | 0.004992 |
| 2.10 | 0.345148 | 0.349938 | 0.004789 |
| 2.20 | 0.328336 | 0.332871 | 0.004535 |
| ... | ... | ... | ... |
| 4.80 | 0.096105 | 0.090718 | 0.005387 |
| 4.90 | 0.091894 | 0.086294 | 0.005600 |
| 5.00 | 0.087880 | 0.082085 | 0.005795 |

Error maksimum = 0.0058

Tabel 2. Tabel solusi numerik Metode Stehfest dan solusi eksak Fungsi $\mathfrak{g}^{-1}(f_2(s))$

| t | Stehfest | Eksak | Error |
|------|----------|----------|----------|
| 0.10 | 0.024938 | 0.024997 | 0.000060 |
| 0.20 | 0.049822 | 0.049979 | 0.000157 |
| 0.30 | 0.074605 | 0.074930 | 0.000325 |
| ... | ... | ... | ... |
| 2.00 | 0.484841 | 0.479426 | 0.005415 |
| 2.10 | 0.510343 | 0.501213 | 0.009130 |
| 2.20 | 0.536107 | 0.522687 | 0.013419 |
| ... | ... | ... | ... |
| 3.80 | 0.922721 | 0.813416 | 0.109305 |
| 3.90 | 0.940385 | 0.827702 | 0.112683 |
| 4.00 | 0.956746 | 0.841471 | 0.115276 |

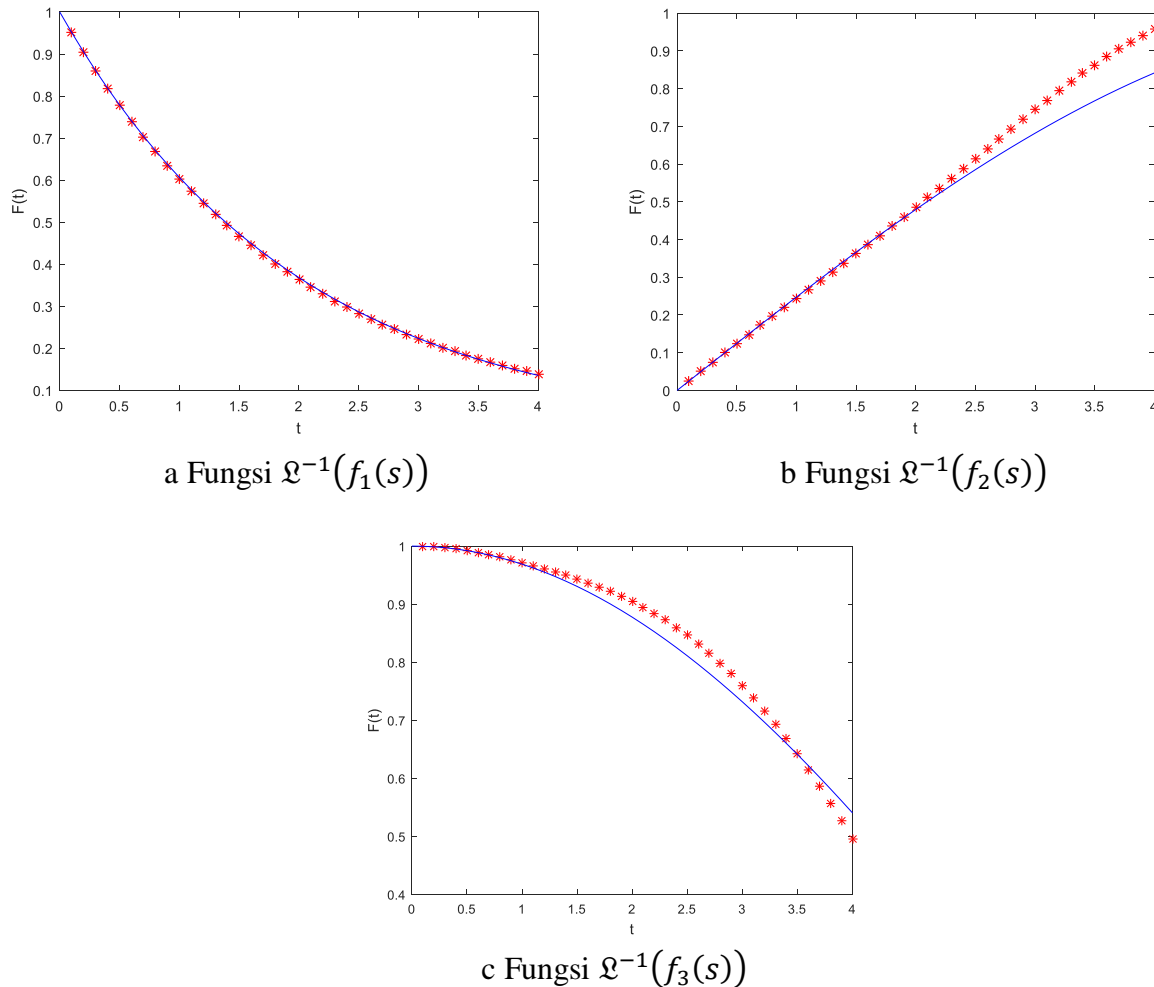
Error maksimum = 0.1153

Tabel 3. Tabel solusi numerik Metode Stehfest dan solusi eksak Fungsi $\mathfrak{g}^{-1}(f_3(s))$

| t | Stehfest | Eksak | Error |
|------|----------|----------|----------|
| 0.10 | 0.999670 | 0.999688 | 0.000018 |
| 0.20 | 0.998686 | 0.998750 | 0.000064 |
| 0.30 | 0.997071 | 0.997189 | 0.000118 |
| ... | ... | ... | ... |
| 2.00 | 0.904172 | 0.877583 | 0.026590 |
| 2.10 | 0.894429 | 0.865324 | 0.029105 |
| 2.20 | 0.883837 | 0.852525 | 0.031312 |
| ... | ... | ... | ... |
| 3.80 | 0.556850 | 0.581683 | 0.024834 |
| 3.90 | 0.526447 | 0.561168 | 0.034721 |
| 4.00 | 0.495153 | 0.540302 | 0.045149 |

Error maksimum = 0.0451

Kurva Gambar 1a, 1b, 1c berikut menunjukkan perbandingan kurva invers transformasi Laplace menggunakan metode Stehfest dan solusi eksak invers transformasi Laplace



Gambar 2a, 2b, 2c. Kurva solusi eksak dan solusi numerik Metode Stehfest

Dari hasil yang ditunjukkan tabel 1, 2, dan 3 serta Gambar 2a, 2b, 2c. dapat diperhatikan bahwa semakin tinggi nilai t maka keakurasian metode stehfest akan semakin berkurang. Dengan kata lain nilai error antara solusi eksak dan solusi numeriknya semakin banyak ketika untuk nilai t yang lebih besar

Selain itu terlihat bahwa metode Stehfest lebih efektif digunakan untuk fungsi yang cenderung turun. Fungsi $\mathcal{L}^{-1}(f_2(s))$ dari metode Stehfest memiliki error yang paling besar jika dibandingkan dengan $\mathcal{L}^{-1}(f_1(s))$ dan $\mathcal{L}^{-1}(f_3(s))$. Dengan demikian metode ini lebih cocok digunakan untuk menganalisis fungsi yang berkaitan dengan aliran air dalam tanah dan industri perminyakan.

Nilai $p=6$ dan $P=3$ metode stehfest memiliki keakurasian yang cukup baik dimana solusinya mendekati solusi eksak dengan error maksimum = 0.1153 untuk mencari invers transformasi Laplace tiga fungsi yang telah ditentukan yaitu fungsi $f_1(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$, $f_2(s) = \frac{1}{4(s^2+\frac{1}{16})}$, dan $f_3(s) = \frac{s}{s^2+\frac{1}{16}}$

SIMPULAN

Inversi numerik transformasi laplace berupa metode Stehfest telah diaplikasikan untuk menyelesaikan tiga fungsi yang telah ditentukan yaitu fungsi $f_1(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$, $f_2(s) = \frac{1}{4(s^2+\frac{1}{16})}$, dan $f_3(s) = \frac{s}{s^2+\frac{1}{16}}$. Adapun fungsi tersebut berturut-turut memiliki solusi eksak $F_1(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, $F_2(t) = \sin \frac{1}{4}t$ dan $F_3(t) = \cos \frac{1}{4}t$. Setelah dibandingkan antara solusi eksak dan solusi numeriknya, metode Stehfest memiliki keakurasian yang cukup baik lebih efektif digunakan untuk fungsi yang cenderung turun. semakin tinggi nilai t maka keakurasian metode stehfest akan semakin berkurang. Untuk tiga fungsi yang telah disebutkan, dipilih nilai $p=6$ dan $P=3$ metode stehfest dan diperoleh error maksimum = 0.1153.

DAFTAR PUSTAKA

- Cheng, A.H-D., P. Sidauruk, Y. Abousleiman. (1994). Approximate Inversion of the Laplace Transform. *Mathematica Journal*, Vol. 4(2), 76-82
- Josso, B. Larsen, L. (2012). Laplace transform numerical inversion. *Kappa Engineering*, June 2012 Issue 1-18
- Kuznetsov, K. (2013). On The Convergence of The Gaver–Stehfest Algorithm. *Siam J. Numer. Anal* Vol. 51, No. 6, pp. 2984–2998
- Keng C.A. (2008). Introducing the boundary element method with MATLAB. *Int. J. Math. Edu. Sci. and Technol.* 39(4): 505-519.
- Humi, M. dan Miller, W. B. (1992). *Boundary Value Problems and Partial Differential Equation*, PWS-KENT, Boston.
- Solekhuddin, I. dan Zahroh, M. (2020). A Numerical Study of Unsteady Infiltration into Two-Layered Soil. *JP Journal of Heat and Mass Transfer* 20(2): 133 – 144.
- Taylor, A. E., W. Robert M. (1983). *Advanced Calculus*. John Wiley & Sons Inc, USA.
- Zahroh, M. (2021). Penentuan Jenis Fungsi Basis Radial Dalam Dual Reciprocity Boundary Element Method. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, Vol 21 pp 53-62.

Zahroh, M. dan Solekhuddin, I. (2022). Root Water Uptake Process for Different Types of Soil in Unsteady Infiltration from Periodic Trapezoidal Channels. *Proceeding of International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)*. Atlantis Press. 113-119